Exercice N°8 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ *on a* $\begin{vmatrix}4&2\\0&1\end{vmatrix}=4\neq 0$ *donc* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires d'où A, B et C déterminent un plan. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P donc P :2x-4y+4z+d=0, le plan P passe par A donc -6+d=0 d'où d=6 ainsi P :x-2y+2z+3=0.

2) a) Soit $M(x,y,z)\in E$ $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ *donc* $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BS}\begin{pmatrix}2\\8\\-2\end{pmatrix}$, $M\in Q \Leftrightarrow 2(x-1)+8(y-1)-2(z-2)=0$

$\Leftrightarrow Q: x+4y-z-3=0$.

b) $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1\\-2&4\end{vmatrix}=6\neq 0$; $\overrightarrow{n_P}$ *et* $\overrightarrow{n_Q}$ ne sont pas colinéaires donc P et Q sont sécantes suivant une droite

Δ ; $\Delta:\begin{cases}x-2y+2z+3=0 & (1)\\ x+4y-z-3=0 & (2)\end{cases}$; $(2)-(1)\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x-2y+2z+3=0\\ 6y-3z-6=0\end{cases}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x-2y+2z+3=0\\ 2y-z-2=0\end{cases}$ On pose

$y=\alpha\Rightarrow\Delta:\begin{cases}y=\alpha\\ z=2y-2=2\alpha-2\\ x=2y-2z-3=2\alpha-4\alpha+4-3\end{cases}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=1-2\alpha\\ y=\alpha\\ z=-2+2\alpha\end{cases}$; $(\alpha\in\mathbf{R})$.

c) $\Delta=D(B,\vec{u})$ *avec* $B(1,0,-2)$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; $d(A,\Delta)=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ *on a* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$ donc

$d(A,\Delta)=\dfrac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{6}{3}=2.$

3) a) P :x-2y+2z+3=0, S(1,1,2) on a : $1-2+4+3\neq 0$ *donc* $S\notin P$ ainsi SABC est un tétraèdre.

$V=\dfrac{1}{6}\left|dét\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right)\right|=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix}4&2&4\\0&1&1\\-2&0&2\end{vmatrix}=\dfrac{1}{6}\left(4\times 2-0-2\times(-2)\right)=2$.

b) $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AS}\right\|$; $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$ *donc* A= $\dfrac{1}{2}\sqrt{4+16+4}=\sqrt{6}.ua$, $V=\dfrac{A\times d\left(B,(SAC)\right)}{3}.uv$ d'où

$d\left(B,(SAC)\right)=\dfrac{3V}{A}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

4) a) Soit M(x,y,z) un point de E, $M\in\Gamma\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+7y-2z-9=0\Leftrightarrow (x^2)+(y^2+7y)+(z^2-2z)-9=0\Leftrightarrow$

$x^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}+(z-1)^2-1-9=0\Leftrightarrow x^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2+(z-1)^2=\dfrac{98}{4}$ d'où Γ est la sphère de centre

$I\left(0,-\dfrac{7}{2},1\right)$ *et de rayon* $R=\dfrac{\sqrt{89}}{2}$.

b) On a :1+1+4+7-4-9=0 donc $S\in\Gamma$, 9+0+0+0-0-9=0 donc $A\in\Gamma$, 1+0+4+0+4-9=0 donc $B\in\Gamma$ et 1+1+0+7-0-9=0 donc $C\in\Gamma$ d'où Γ est la sphère circonscrite au tétraèdre SABC.

c) $\{A,B,C\}\subset P$ *et* $\{A,B,C,S\}\subset\Gamma$ *donc* $P\cap\Gamma=\zeta$: *le cercle circonscrit au triangle ABC*.

Exercice N°9 Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace E. Soit A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) et D(1,1,1) quatre points de l'espace.

1) a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Devoir.th
Toutes les matières, tous les niveaux...